26/11/15

Άσκ 14

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -2\\ 0 & -2 & -2\end{bmatrix}, \quad T_J = D^{-1}(L+U)=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1/2 & \\ & & -1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1/2 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

$$\det(T_J-\lambda I)=\begin{vmatrix}-\lambda & 1 & 0\\ 1/2 & -\lambda & 1\\ 0 & -1 & -\lambda\end{vmatrix} = -\lambda^3-\lambda+\frac{1}{2}\lambda = -\lambda\left(\lambda^2+\frac{1}{2}\right)=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda_1=0\\ \lambda_2=\frac{\sqrt{2}}{2}i\\ \lambda_3=-\frac{\sqrt{2}}{2}i\end{cases}$$

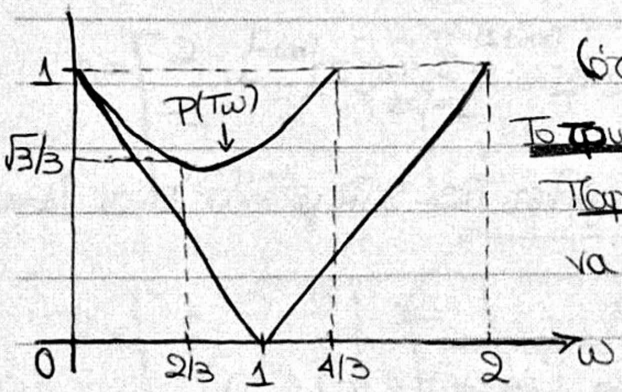
$T_\omega = (1-\omega)I+\omega T_J, \quad \mu(\omega)=1-\omega+\omega\lambda.$

$\mu_1(\omega)=1-\omega \quad , |1-\omega|<1 \Leftrightarrow -1<1-\omega<1 \Leftrightarrow \omega\in(0,2)$

$$\left.\begin{aligned}\mu_2(\omega)&=1-\omega+\frac{\sqrt{2}}{2}i\cdot\omega\\ \mu_3(\omega)&=1-\omega-\frac{\sqrt{2}}{2}i\omega\end{aligned}\right\} \quad |\mu_2(\omega)|=|\mu_3(\omega)|=\sqrt{(1-\omega)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\omega\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{2}\omega^2-2\omega+1}<1$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}\omega^2-2\omega+1<1 \Leftrightarrow \omega(3/2\,\omega-2)<0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}\omega\left(\omega-\frac{4}{3}\right)<0$$

$\Leftrightarrow \omega\in(0,4/3)$. Περιοχή σύγκλισης $=(0,2)\cap(0,4/3)=(0,4/3)$



(όταν έχω μιγαδικές ιδιοτιμές παίρνω την τομή.)

Το τριώνυμο είναι

Παραβολή: Παίρνω παράγωγο ίση με το μηδέν για να βρώ το ελάχιστο.

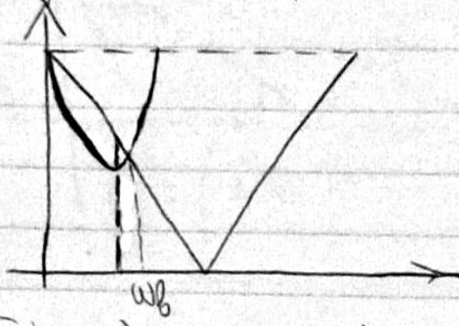
$$\omega_{\beta\pi}: -\frac{b}{2a}=-\frac{-2}{2\cdot\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}, \quad |\mu_2(\omega_{\beta\pi})|=|\mu_3(\omega_{\beta\pi})|=\sqrt{\frac{3}{2}\omega_{\beta\pi}^2-2\omega_{\beta\pi}+1}=$$

$$=\sqrt{\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2-2\cdot\frac{2}{3}+1}=\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

για $\boxed{\omega=0}$ $\rightsquigarrow \mu(0)=1$ (ισχύει πάντα)
(φασματική ακτίνα $\rightsquigarrow$ μεγαλύτερο μέτρο ιδιοτιμών).

$\omega_b = \omega_{b\pi} = \frac{2}{3}$, $\rho(T_\omega) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

IIχ. Όταν η παραβολή δεν είναι ολόκληρη πάνω απ' την τεθλασμένη γραμμή.



Εξισώνω: $|\mu_1(\omega)| = |\mu_2(\omega)|$

Σημείο τομής.

Βρίσκω τις ρίζες. Από αυτές η μια θα 'ναι μηδέν, οπότε την απορρίπτω.

Μέθοδος διαδοχικής υπερχαλάρωσης (SOR)

Διαχωρίζουμε τον $A=D-L-U$ και θεωρούμε τον διαχωρισμό $A = M_\omega - N_\omega$, όπου
$M_\omega = \frac{1}{\omega}\cdot(D-\omega L) \overset{\omega\neq 0}{,} N_\omega = M_\omega - A = \frac{1}{\omega}(D-\omega L) - (D-L-U) = \frac{1}{\omega}[(1-\omega)D+\omega U]$.

$$\mathcal{L}_\omega = M_\omega^{-1}\cdot N_\omega = (D-\omega L)^{-1}[(1-\omega)D+\omega\cdot U].$$

Επαναληπτική μέθοδος

$$x^{(m+1)} = \mathcal{L}_\omega\cdot x^{(m)} + \omega(D-\omega L)^{-1}\cdot b \qquad , m=0,1,2,\dots, x^{(0)}\in\mathbb{R}^n.$$

$$(D-\omega L)\cdot x^{(m+1)} = [(1-\omega)D+\omega\cdot U]\cdot x^{(m)} + \omega b$$

$$x_i^{(m+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[\omega b_i - \omega\cdot\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(m+1)} + (1-\omega)a_{ii}x_i^{(m)} - \omega\cdot\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(m)}\right]$$

$i=1(1)n$, $m=0,1,2,\dots$ $\boxed{x^{(0)}\in\mathbb{R}^n}$

$$x_i^{(m+1)} = (1-\omega)x_i^{(m)} + \omega\cdot\frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(m+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(m)}\right].$$

Θεώρημα (Kahan): Αναγκαία συνθήκη για τη σύγκλιση της SOR μεθόδου είναι $|1-\omega| < 1$, για $\omega\in\mathbb{C}$ ή $\omega\in(0,2)$ για $\omega\in\mathbb{R}$.

Για να συγκλίνει θα πρέπει $|\lambda_i|<1$, $i=1(1)n$, όπου $\lambda_i\in\sigma(\mathcal{L}_\omega)$.
Επομένως ισχύει $\prod_{i=1}^{n}|\lambda_i|<1$, $\prod_{i=1}^{n}|\lambda_i| = \left|\prod_{i=1}^{n}\lambda_i\right| = |\det(\mathcal{L}_\omega)|<1$

$$|\det(\mathcal{L}_\omega)| = |\det((D-\omega L)^{-1}[(1-\omega)D+\omega U])| = |\det(D-\omega L)^{-1}\cdot\det[(1-\omega)\cdot D + \omega U]| = \left|\frac{1}{\det(D)}\cdot(1-\omega)^n\det(D)\right| = |(1-\omega)^n| < 1 \Leftrightarrow |1-\omega|<1.$$

<u>Θεώρημα (Ostrovsky-Reich-Varga)</u>: Έστω $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ ερμιτιανός και θετικά ορισμένος. Τότε, το διάστημα $(0,2)$ για ω πραγματικό, αποτελεί ικανό & αναγκαίο κριτήριο για τη σύγκλιση της SOR.

<u>Πόρισμα (Reich)</u>: Έστω $A\in\mathbb{C}^{n,n}$ ερμιτιανός κ' θετικά ορισμένος. Τότε η μέθοδος Gauss-Seidel συγκλίνει.

$\mathcal{L}_\omega = (D-\omega L)^{-1}[(1-\omega)D+\omega U]$ $\quad \mathcal{L}_1 = (D-L)^{-1}\cdot U = T_{GS}$, από το θεώρημα O-R-V η Gauss-Seidel συγκλίνει επειδή $1\in(0,2)$

<u>Ορισμός</u>: Ένας πίνακας $A\in\mathbb{C}^{n,n}$ λέγεται <u>δικυκλικός</u> αν-ν υπάρχει μεταθετικός πίνακας P <u>τ.ώ.</u> $PAP^T = \begin{bmatrix} D_1 & B \\ C & D_2\end{bmatrix}$, όπου D_1, D_2 διαγώνιοι πίνακες!

<u>Ορισμός</u>: Έστω $A\in\mathbb{C}^{n,n}$ <u>δικυκλικός</u> πίνακας. Ο A λέγεται συνεπώς <u>διατεταγμένος</u> αν-ν $\sigma(D^{-1}(\alpha L + \frac{1}{\alpha}U)) = \sigma(D^{-1}(L+U))\ \forall \alpha\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

Κάθε <u>δικυκλικός</u> πίνακας, που είναι στην δικυκλική του μορφή, θα 'ναι συνεπώς <u>διατεταγμένος</u>.

Κάθε <u>τριδιαγώνιος πίνακας</u> είναι δικυκλικός και συνεπώς <u>διατεταγμένος</u>.

Αν θεωρήσουμε τη μετάθεση $(1,3,5,\dots,2,4,6,\dots)$, $P = \begin{bmatrix} e^{1T} \\ e^{3T} \\ \vdots \\ e^{2T} \\ e^{4T} \\ \vdots \end{bmatrix}$, τότε ο PAP^T έρχεται στη δικυκλική μορφή.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad PAP^T = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ \hline -1 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

(Η πρώτη στήλη παραμένει ίδια, η δεύτερη και η τρίτη αλλάζει)

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

<u>Λήμμα</u>: Έστω $A\in\mathbb{C}^{n,n}$ δικυκλικός και συνεπώς διατεταγμένος. Τότε οι μη μηδενικές ιδιοτιμές του πίνακα Jacobi, υπεισέρχονται σε ζεύγη αντίθετων ιδιοτιμών.

<u>Απόδειξη</u>

$\mu\in\sigma(D^{-1}(L+U)) \Leftrightarrow \mu\in\sigma(D^{-1}(\alpha L+\frac{1}{\alpha}U)),\ \alpha\neq0 \Leftrightarrow \mu\in\sigma(D^{-1}(-L-U))$

$\Leftrightarrow \mu \in -\sigma(D^{-1}(L+U)) \Leftrightarrow -\mu \in \sigma(D^{-1}(L+U))$

Πόρισμα: Αν $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ τριδιαγώνιος, n περιττός, τότε ο πίνακας Jacobi είναι μη αντιστρέψιμος.

Θεώρημα: Έστω $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ δικυκλικός κ' συνεπώς διατεταγμένος. Αν $\mu \in \sigma(D^{-1}(L+U))$ και $\lambda \neq 0$ τ.ω. $(\lambda + \omega - 1)^2 = \omega^2 \mu^2 \lambda$ (*)
Τότε $\lambda \in \sigma(\mathcal{L}_\omega)$
Αντίστροφα, αν $\lambda \neq 0$, $\lambda \in \sigma(\mathcal{L}_\omega)$ και μ τ.ω. να πληρείται η σχέση (*), τότε $\mu \in \sigma(D^{-1}(L+U))$.

$$\det(\mathcal{L}_\omega - \lambda I) = \det\left((D-L)^{-1}[(1-\omega)\cdot D + \omega U] - \lambda I\right)$$
$$= \det(D-L)^{-1} \det\left((1-\omega)D + \omega U - \lambda(D - \omega L)\right) = \frac{1}{\det(D)} \cdot \det\left((1-\omega-\lambda) \cdot D + \omega\lambda L + \omega U\right) = \frac{(-1)^n \cdot \omega^n \cdot \lambda^{n/2}}{\det(D)} \cdot \det\left(\frac{\lambda+\omega-1}{\omega \cdot \lambda^{1/2}} \cdot D - \lambda^{1/2} \cdot L - \frac{1}{\lambda^{1/2}} \cdot U\right) =$$
$$= (-1)^n \omega^n \cdot \lambda^{n/2} \cdot \frac{1}{\cancel{\det(D)}} \cancel{\det(D)} \cdot \det\left(\frac{\lambda+\omega-1}{\omega \cdot \lambda^{1/2}} \cdot I - D^{-1}\left(\lambda^{1/2} \cdot L + \frac{1}{\lambda^{1/2}} U\right)\right) =$$
$$0 \Leftrightarrow \frac{\lambda+\omega-1}{\omega\lambda^{1/2}} \in \sigma\left(D^{-1}\left(\lambda^{1/2} L + \frac{1}{\lambda^{1/2}} U\right)\right) = \sigma(D^{-1}(L+U))$$

$$\mu = \frac{\lambda+\omega-1}{\omega \cdot \lambda^{1/2}} \Leftrightarrow \mu^2 \omega^2 \lambda = (\lambda+\omega-1)^2.$$